6. Produits de mesures et Changement de variables

Exercice 1. Montrer que $\mathcal{P}(\mathbb{N}) \otimes \mathcal{P}(\mathbb{N}) = \mathcal{P}(\mathbb{N}^2)$ et que $m \otimes m$ est la mesure de comptage sur $\mathbb{N}^2$. Donner un exemple de mesure sur $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$ qui n'est pas le produit de deux mesures sur $\mathbb{R}$.

Exercice 2. Soient λ la mesure de Lebesgue sur $([0,1], \mathcal{B} = \mathcal{B}([0,1]))$ et m mesure de comptage sur $([0,1], \mathcal{P} = \mathcal{P}([0,1]))$. Soit $D = \{(x,x),\ x \in [0,1]\}$ la diagonale de $[0,1]^2$.

(i) Montrer que $D \in \mathcal{B} \otimes \mathcal{P}$ (autrement dit, $\mathbb{1}_D$ est $\mathcal{B} \otimes \mathcal{P}$-mesurable).

(ii) Expliquer les résultats des intégrales suivantes :

$$\int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \mathbb{1}_D(x,y)\,\mathrm{d}\lambda(x) \right) \mathrm{d}m(y) \quad \text{et} \quad \int_{[0,1]} \left(\int_{[0,1]} \mathbb{1}_D(x,y)\,\mathrm{d}m(y) \right) \mathrm{d}\lambda(x).$$

Exercice 3. Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ une fonction mesurable. Notons $\Gamma = \{(x, f(x)),\ x \in \mathbb{R}^d\}$ le graphe de f. Montrer que Γ est mesurable et de mesure de Lebesgue nulle dans $\mathbb{R}^{d+1}$.

Exercice 4. Étudier l'intégrabilité de f_α sur $\mathbb{R}_+^2$ selon α et calculer son intégrale lorsque c'est possible :

$$f_\alpha : (x,y) \mapsto \frac{1}{(1+x+y)^\alpha}.$$

Exercice 5. En étudiant la fonction $(x,y) \mapsto x^y$ sur $[0,1] \times [a,b]$, calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^1 \frac{x^b - x^a}{\ln x}\,\mathrm{d}x.$$

Exercice 6. Calculer l'intégrale de Gauss ci-dessous en l'élevant au carré :

$$\int_{\mathbb{R}} e^{-x^2}\,\mathrm{d}x.$$

Déterminer les valeurs de $\alpha \in \mathbb{R}$ pour lesquelles $f_\alpha : (x,y) \mapsto \exp(-x^2 - \alpha xy - y^2)$ est intégrable sur $\mathbb{R}^2$.

Exercice 7. Notons B_d la boule unité de $\mathbb{R}^d$ pour la norme $\|\cdot\|_2$. Calculer le volume de B_d en montrant :

$$\forall d \geq 2,\ \lambda_d(B_d) = \frac{2\pi}{d}\lambda_{d-2}(B_{d-2}).$$

Exercice 8. Soient $U =]0,1[^2 \times]-\pi,\pi[$ et φ l'application définie par :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ (u,v,w) & \mapsto & (u, uv\cos w, v \sin w). \end{array}$$

Montrer que φ définit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U sur son image et calculer $\lambda_3(\varphi(U))$.

Exercice 9. Soient $U = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2,\ u > v > 0\}$ et $V = \{(u,v) \in \mathbb{R}^2,\ v > u > 0\}$. Considérons ψ l'application définie par :

$$\begin{array}{rcl} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \mapsto & (u^2+v^2, 2uv). \end{array}$$

Montrer que ψ définit un $\mathcal{C}^1$-difféomorphisme de U (resp. V) sur son image que l'on déterminera. En déduire la valeur de l'intégrale suivante :

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} |u^4 - v^4|\, e^{-(u+v)^2}\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v.$$